Schwache Unstetigkeiten in der Magnetohydrodynamik

Von J. Szabó

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Budapest

(Z. Naturforschg. 15 a, 503—505 [1960]; eingegangen am 8. Dezember 1959)

Es wird gezeigt, daß sich eine schwache Unstetigkeitsfläche in einem idealen Plasma mit der Geschwindigkeit kleiner Störungen fortpflanzt. Es wird weiter bewiesen, daß die fortschreitende Fläche schwacher Unstetigkeit und die Charakteristiken des Gleichungssystems der Magnetohydrodynamik idealer Medien ein und dasselbe sind.

Es ist aus der gewöhnlichen Hydrodynamik bekannt [1], daß eine schwache Unstetigkeitsfläche in einer idealen Flüssigkeit entweder stationär ist, oder ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Geschwindigkeit kleiner Störungen, d. h. der Schallgeschwindigkeit gleich ist. Die schwache Unstetigkeit steht mit den Charakteristiken des Gleichungssystems des idealen Mediums in engem Zusammenhang. Die fortschreitende Fläche schwacher Unstetigkeit und die Charakteristiken des Gleichungssystems der Gasdynamik sind nämlich ein und dasselbe.

Der Zweck dieser Arbeit ist, zu zeigen, daß in der Magnetohydrodynamik idealer Plasmen dasselbe gilt.

Es sei vorausgesetzt, daß ständig eine Fläche S mit der Gleichung

$$\varphi(x, y, z, t) = 0 \tag{1}$$

existiert, die durch die Punkte des Gasraumes verläuft und daß beim Durchgang durch die Fläche die magnetohydrodynamischen Größen ($\mathfrak{H}, \mathfrak{v}, p, \varrho$) selbst stetig sind, sich aber unter deren partiellen Ableitungen wenigstens eine befindet, die sich sprungartig beim Durchgang durch die Fläche S ändert. Die Fläche (1) wird in diesem Fall als Fläche schwacher Unstetigkeit bezeichnet. Die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Unstetigkeitsfläche (1) im Raum ist:

$$N = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}} . \tag{2}$$

Die Forderung, daß sich die Unstetigkeitsfläche im Laufe der Zeit nicht auflöse, ergibt zwischen den Sprüngen der Ableitungen einer magnetohydrodynamischen Größe Φ die sogenannten kinematischen Verträglichkeitsrelationen [2]:

$$[\operatorname{grad} \Phi] = \lambda_\Phi \, \mathfrak{n}; \qquad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right] = -\lambda_\Phi N , \tag{3}$$

wobei das Symbol $[A]$ den Sprung der Größe A beim Durchgang durch die Fläche S bedeutet, $\mathfrak{n}$ der Einheitsvektor der Normalen, N gemäß (2) die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Fläche und λ_Φ eine auf S definierte Funktion der Koordinaten und der Zeit ist.

Außer den kinematischen Bedingungen (3) müssen die Sprünge der Ableitungen der verschiedenen magnetohydrodynamischen Größen noch den dynamischen Bedingungen genügen, die sich daraus ergeben, daß auf den beiden Seiten der Fläche S die magnetohydrodynamischen Gleichungen erfüllt sein müssen. Für ein ideales Plasma lauten diese Gleichungen:

$$\partial \mathfrak{H}/\partial t = \operatorname{rot}[\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}] , \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 , \tag{4, 5}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v} = -\frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p - \frac{1}{4\pi\varrho} [\mathfrak{H} \times \operatorname{rot} \mathfrak{H}] , \tag{6}$$

$$\partial \varrho/\partial t + \operatorname{div}(\varrho \mathfrak{v}) = 0 , \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\varrho^\varkappa}\right) + \mathfrak{v} \operatorname{grad}\left(\frac{p}{\varrho^\varkappa}\right) = 0 , \tag{8}$$

wo $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke, $\mathfrak{v}$ die hydrodynamische Geschwindigkeit, ϱ die Massendichte, p den Druck bedeuten, $\varkappa$ aber das Verhältnis der spezifischen Wärmen ist. Die letzte dieser Gleichungen entspricht der Erhaltung der Entropie bei adiabatischer Bewegung des Mediums.

Nach einfachen Umformungen können die Gln. (4) bis (8) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = (\mathfrak{H} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v} - (\mathfrak{v} \operatorname{grad})\, \mathfrak{H} - \mathfrak{H} \operatorname{div} \mathfrak{v} , \tag{9}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 , \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v} = -\frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p - \frac{1}{4\pi\varrho} [\mathfrak{H} \times \operatorname{rot} \mathfrak{H}], \tag{11}$$

[1] N. J. Kotschin, I. A. Kibel und N. W. Rose, Theoretische Hydromechanik, Bd. 2, Gostjechisdat, Moskau—Leningrad 1948 (Russisch).

[2] N. J. Kotschin et al., s. Anm. [1].

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \operatorname{div} \mathfrak{v} + \mathfrak{v} \operatorname{grad} \varrho = 0\,, \tag{12}$$

$$\varrho \frac{\partial p}{\partial t} - \varkappa\, p \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho\, \mathfrak{v} \operatorname{grad} p - \varkappa\, p\, \mathfrak{v} \operatorname{grad} \varrho = 0\,. \tag{13}$$

Indem wir diese Gleichungen auf den beiden Seiten der Fläche S aufschreiben, kommen wir nach Grenzübergang auf die Fläche, unter Heranziehung von (3) zu den Beziehungen:

$$(\vec{\lambda}_v\, \mathfrak{n})\, \mathfrak{H} - \vec{\lambda}_v\, H_n - \vec{\lambda}_H (N - v_n) = 0\,, \tag{14}$$

$$\vec{\lambda}_H\, \mathfrak{n} = 0\,, \tag{15}$$

$$\varrho\, \vec{\lambda}_v (N - v_n) - \frac{1}{4\pi} (\vec{\lambda}_H\, \mathfrak{H})\, \mathfrak{n} + \frac{1}{4\pi} \vec{\lambda}_H\, H_n - \lambda_p\, \mathfrak{n} = 0\,, \tag{16}$$

$$\lambda_\varrho (N - v_n) - \varrho\, \vec{\lambda}_v\, \mathfrak{n} = 0\,, \tag{17}$$

$$\lambda_p\, \varrho (N - v_n) - \varkappa\, p\, \lambda_\varrho (N - v_n) = 0\,. \tag{18}$$

In den Gln. (14) bis (18) sind $\vec{\lambda}_H$ bzw. $\vec{\lambda}_0$ Vektoren mit den Komponenten λ_{Hx}, λ_{Hy}, λ_{Hz} bzw. λ_{vx}, λ_{vy}, λ_{vz}.

Die acht Größen λ genügen acht homogenen Gleichungen. Damit dieses Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung besitzt, damit also die Fläche S eine Unstetigkeitsfläche ist, ist es notwendig, daß die Determinante des Systems gleich Null ist. Wir berechnen diese Determinante und setzen sie gleich Null. So erhalten wir nach einer elementaren Rechnung für die Existenz einer nicht-trivialen Lösung von Gln. (14) bis (18):

$$\Theta^2 \left(\Theta^2 - \frac{H_n^2}{4\pi\varrho}\right) \left\{ \Theta^4 - \left(\frac{\varkappa\, p}{\varrho} + \frac{H^2}{4\pi\varrho}\right) \Theta^2 + \frac{\varkappa\, p}{\varrho} \frac{H_n^2}{4\pi\varrho} \right\} = 0\,. \tag{19}$$

Die Größe $\Theta = N - v_n$ bedeutet hier die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Fläche schwacher Unstetigkeit, d. h. die Geschwindigkeit, die diese Fläche gegenüber dem Plasma hat. Nach (19) ist diese Geschwindigkeit gleich der Geschwindigkeit kleiner Störungen in einem idealen Plasma [3]. Dies hängt damit zusammen, daß in einem unendlich ausgedehnten, idealen Plasma keine Dispersion auftritt; die Phasengeschwindigkeit und die Gruppengeschwindigkeit sind also einander gleich.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie die schwache Unstetigkeit mit den Charakteristiken des Gleichungssystems (9) bis (13) zusammenhängt. Zur Betrachtung der Charakteristiken führt bekanntlich das CAUCHYsche Problem, das sich in unserem Fall folgendermaßen formulieren läßt. Auf einer Hyperfläche S mit der Gleichung

$$\varphi(x, y, z, t) = 0 \tag{20}$$

sind die Werte aller Funktionen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{v}$, p, ϱ vorgegeben. Gefordert ist, in dem S umgebenden Bereich die stetigen und eindeutigen Funktionen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{v}$, p, ϱ zu finden, die den Gln. (9) bis (13) genügen und auf S in das System der vorgegebenen Werte übergehen. Die eindeutige Lösung des CAUCHYschen Problems steht in Zusammenhang mit der Möglichkeit, auf der Mannigfaltigkeit S sämtliche Ableitungen der gesuchten Funktionen aus den vorgegebenen Werten und aus dem Gleichungssystem (9) bis (13) zu bestimmen. Wir erinnern uns, daß die ersten Ableitungen der gesuchten Funktionen auf der Mannigfaltigkeit S durch die vorgegebenen Werte und durch das Gleichungssystem (9) bis (13) eindeutig bestimmt werden, wenn die charakteristische Bedingung nicht erfüllt ist, d. h. die charakteristische Determinante des Gleichungssystems (9) bis (13) von Null verschieden ist [4]. Diese Determinante ist in unserem Fall:

Formel (21) siehe Seite 505 oben

wo
$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{22}$$

und
$$B = H_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + H_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + H_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{23}$$

sind.

Wenn die Hyperfläche S und die auf ihr vorgegebenen Funktionen so beschaffen sind, daß die Determinante (21) Null wird, heißt die Mannigfaltigkeit S charakteristische Fläche oder Charakteristik. Wenn S eine charakteristische Fläche darstellt, können sich zwei Lösungen ergeben, die auf S ein und dieselben Werte annehmen, deren erste Ableitungen jedoch auf S verschieden sind. In einem solchen Fall würden wir aber die Fläche S als fortschreitende Fläche schwacher Unstetigkeit bezeichnen. Es ist nun leicht zu sehen, daß das Verschwinden der Determinante (21) mit der Bedingung (19) übereinstimmt. Man bekommt nämlich nach einfachen Rechnungen:

[3] Siehe z. B. S. I. SYROVATSKI, Uspechi Fiz. Nauk **62**, 247 [1957]. — R. LÜST, Fortschritte der Physik **7**, 503 [1959].

[4] R. COURANT u. D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Bd. 2, Springer-Verlag, Berlin 1931.

$$
D = \tag{21}
$$

$$
\begin{vmatrix}
H_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} - B & H_x \frac{\partial\varphi}{\partial y} & H_x \frac{\partial\varphi}{\partial z} & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\
H_y \frac{\partial\varphi}{\partial x} & H_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} - B & H_y \frac{\partial\varphi}{\partial z} & 0 & A & 0 & 0 & 0 \\
H_z \frac{\partial\varphi}{\partial x} & H_z \frac{\partial\varphi}{\partial y} & H_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} - B & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\
A & 0 & 0 & -\frac{H_y}{4\pi\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{H_z}{4\pi\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{H_y}{4\pi\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{H_z}{4\pi\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial x} & 0 & \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\
0 & A & 0 & \frac{H_x}{4\pi\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial y} & -\frac{H_x}{4\pi\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{H_z}{4\pi\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{H_z}{4\pi\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial y} & 0 & \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\
0 & 0 & A & \frac{H_x}{4\pi\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{H_y}{4\pi\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial z} & -\frac{H_x}{4\pi\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{H_y}{4\pi\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial y} & 0 & \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \\
\frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varrho} A & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\varkappa p}{\varrho} A & A
\end{vmatrix}
$$

$$
D = -\frac{A^2}{\varrho}\left(A^2 - \frac{B^2}{4\pi\varrho}\right)\left\{A^4 - \left(\frac{\varkappa p}{\varrho} + \frac{H^2}{4\pi\varrho}\right)A^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right. \tag{24}
$$
$$
\left. + \frac{\varkappa p}{\varrho}\frac{B^2}{4\pi\varrho}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}
$$

Führt man nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Charakteristik ein:

$$
N - v_n = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + v_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + v_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + v_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}} \tag{25}
$$

und berücksichtigt, daß gemäß (22) und (25)

$$
A = -(N - v_n)\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}
$$

ist, so ergibt sich unter Heranziehung von (23) aus dem Verschwinden der Determinante (21):

$$
\Theta^2\left(\Theta^2 - \frac{H_n^2}{4\pi\varrho}\right)\left\{\Theta^4 - \left(\frac{\varkappa p}{\varrho} + \frac{H^2}{4\pi\varrho}\right)\Theta^2 + \frac{\varkappa p}{\varrho}\frac{H_n^2}{4\pi\varrho}\right\} = 0\,, \tag{26}
$$

wobei wieder $\Theta = N - v_n$ ist. Wir kommen also auf (19) zurück. Das bedeutet aber, daß die Charakteristiken des Gleichungssystems (9) bis (13) und die Fläche schwacher Unstetigkeit ein und dasselbe sind.